ANALISI I: funzioni di 1 variabile

ANALISI II: funzioni di 2 o più variabili

Calcolo del Dominio nelle funzioni a 1 variabile

$\exists$ domini di una funzione

$$f: \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

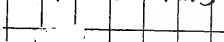
sono in genere facili da rappresentare

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad D_f: x \neq 0$ (punto in cui ha senso fare il limite)

$\longrightarrow \times \longrightarrow$ $\quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$

Es: $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad D_f: \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0 \ e \ x \neq 0\}$



Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

Lo studio del calcolo infinitesimale in più variabili richiede un certo uso del calcolo vettoriale. È quindi utile richiamare alcune notazioni vettoriali

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ sarà il nostro ambiente naturale. I suoi elementi, VETTORI, saranno così indicati:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{con } x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n$$

Es: $(0, -\sqrt{2}, \pi) \in \mathbb{R}^3$

Notazione $\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x, y)$ oppure (x_1, x_2)

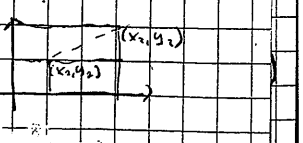
$\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (x, y, z)$ oppure (x_1, x_2, x_3)

In generale per due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ saranno soddisfatte le seguenti proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vec{y} \in \mathbb{R}^n \ (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ c \in \mathbb{R} \quad c\vec{x} = (cx_1, cx_2 \dots, cx_n) \end{array}$$

Distanza tra vettori di $\mathbb{R}^n$

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$ (Pitagora)



$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right] \Rightarrow d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_n - y_n)^2}$$

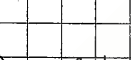
Es: Calcolare la distanza tra $(-1, 3, -7)$ $(0, -\pi, \sqrt{2})$

$$d = \sqrt{1 + (3+\pi)^2 + (7+\sqrt{2})^2}$$

Intervalli

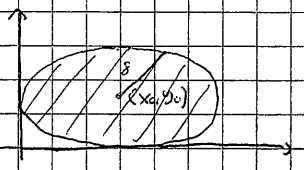
Nelle funzioni a 1 variabile si ha:

$$I_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$



Nelle funzioni a 2 o più variabili si ha:

$$B_\delta(x_0, y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta\}$$



$$B_\delta(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{y}, \vec{x}) < \delta\}$$

$\downarrow$

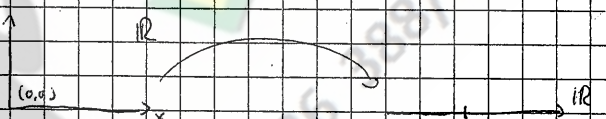
$(x_1, x_2, \dots x_n)$

Calcolo del Dominio nelle funzioni di 2 o più variabili

Una funzione di n variabili è una funzione che associa a vettori in $\mathbb{R}^n$ un numero reale:

$$\Omega \subset \mathbb{R} \quad \text{dove } \vec{y} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow f(\vec{y}) \in \mathbb{R}$$

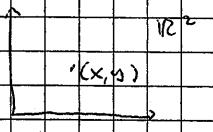
Es: $f(x,y) = x^2 + \sin y$



Es: $f(x,y) = \ln|x \cdot y|$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \setminus (\{(x,0)\} \cup \{(0,y)\})$$



Es: $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y}}{\ln(x+y)}$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \geq 0,\ x+y > 0,\ x+y \neq 1\}$$

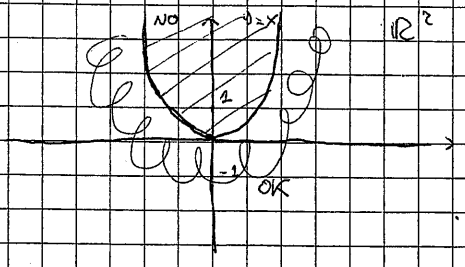
→ perché $\ln(1) = 0$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \geq 0\}$

$x^2 - y = 0 \iff y = x^2$

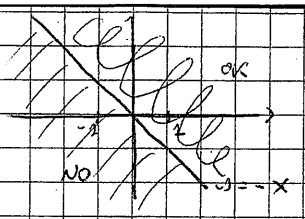
$0 - 1 = -1 < 0$ NO

$1 - 0 = 1 \geq 0$ SI



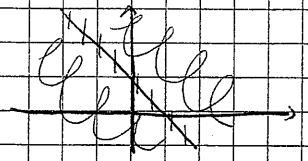
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$

$x+y=0$

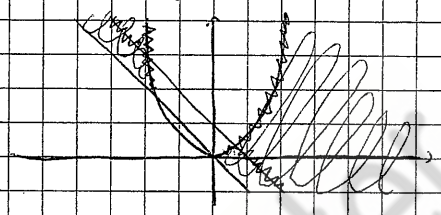


- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \neq 1\}$

$x+y \neq 1$



Complessivamente avremo il grafico:



dove i punti di aderenza sono i punti del dominio

Grafici e Insiemi di livello

Ricordiamo che il <u>grafico</u> di una funzione reale di variabile reale, $y=f(x)$, è l'insieme dei punti del piano $\mathbb{R}^2$ di coordinate $(x, f(x))$

$$Gf = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$$

Analogamente, il grafico di una funzione reale di più variabili reali

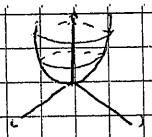
$$f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad Gf = \{(x,y), f(x,y)\}$$

C'è un altro modo di rappresentare graficamente una funzione $z=f(x,y)$ ed è quello di tracciare le sue <u>linee di livello</u>. Si pensi alla superficie grafico di f come la superficie terrestre in una regione montuosa; le linee di livello sono quelle che si tracciano nelle carte topografiche. Un grafico a curve di livello è un disegno nel piano in cui si tracciano le linee lungo le quali f ha valore costante, per un insieme sufficientemente fitto di valori di f (nel caso delle carte topografiche, il valore di f è la quota sul livello del mare e le linee di livello rappresentano, per esempio, le quote $f=100$ m, $f=150$ m, $f=200$ m ecc.)

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{D} \ni (x,y) \xrightarrow{f} f(x,y) \in \mathbb{R}$$

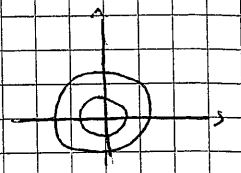
$$\mathcal{C}_{\lambda \in \mathbb{R}} = \{(x,y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \overset{\subset \mathbb{R}^2}{=} \lambda\}$$

Es $f(x,y) = x^2+y^2$ (paraboloide)



$C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = \lambda\}$

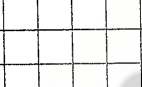
- $\lambda < 0$ $\quad C_\lambda = \emptyset$
- $\lambda = 0$ $\quad C_0 = \{(0,0)\}$
- $\lambda > 0$ $\quad C_\lambda$ = circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



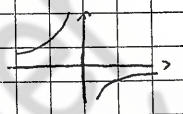
Es $f(x,y) = x \cdot y$

$C_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = \lambda\}$

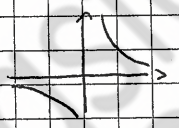
- $\lambda = 0$ $\quad C_0$ =



- $\lambda < 0$ $\quad C_\lambda = \{xy = \lambda\}$ (iperbole)



- $\lambda > 0$ $\quad C_\lambda = \{x \cdot y = \lambda\}$



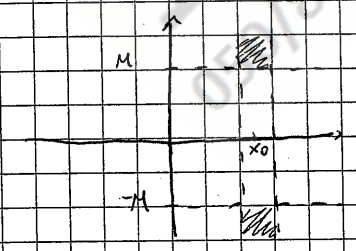
Limiti

Nelle funzioni a 1 variabile avremo:

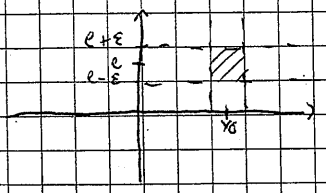
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \ (1) \\ -\infty \ (2) \\ \ell \in \mathbb{R} \ (3) \\ \text{N.E (non esiste)} \ (4) \end{cases}$$

(1) $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > M \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

(2) $\forall M < 0$ // // // // // //

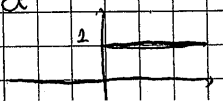


(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$



(4) se non succede nessuna delle 3 possibilità

Es: $f: \mathbb{R} - \{x_0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \end{cases}$



si parla di $\lim_{x \to x_0^-}$ e $\lim_{x \to x_0^+}$

Dal punto di vista formale la definizione di limite per funzioni di più variabili è simile a quella data per funzioni reali di variabile reale.
Per funzioni $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuano a valere inalterati:
- il teorema di unicità del limite
- il teorema sul limite della somma, del prodotto per una costante, del prodotto e del quoziente di due funzioni
- il teorema del confronto
- la definizione di funzione continua

Avremo quindi per $f(\vec{x})$ $\vec{x} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}^2$:

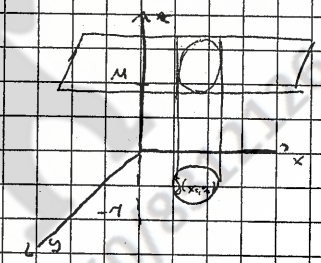
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \begin{cases} +\infty & ⑤ \\ -\infty & ② \\ \ell \in \mathbb{R} & ③ \\ M-\varepsilon & ④ \end{cases}$$

① $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $f(x,y) > M$ se $(x,y) \in B_\delta(x_0, y_0) \setminus (x_0, y_0)$

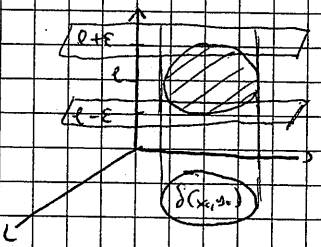
② $\forall M < 0$ " " " " " " " "

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$



③ $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon \quad (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$



Continuità della funzione

Nelle funzioni a 1 variabile

$f: \underset{x_0 \subset \mathbb{R}}{\Omega \subset \mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $\quad f$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$